Cas simple

Supposons qu'on dispose d'un ensemble N dans un espace de dimension n.
On considère une loi gaussienne multivariée de marice de covariance proportionelle à l'identité :

$$\Sigma = \lambda * I_n$$

On veut maximiser la log-vraissemblance des points qui s'écrit :

$$l(\lambda, \mu) \propto \frac{1}{2} N \log \det(\frac{1}{\lambda} I_n) - \frac{N}{2} Trace(\frac{1}{\lambda} * \hat{\Sigma})$$

Soit en posant $\alpha = \lambda^{-1}$:

$$l(\lambda, \mu) \propto \frac{1}{2} N \log \det(\alpha I_n) - \frac{N}{2} Trace(\alpha * \hat{\Sigma})$$

La différentiation par rapport à μ nous donne $\mu = \hat{\mu}$.
On différencie par rapport à α et on écrit l'égalité à 0 qui nous donne :

$$0 = \frac{Nn}{2\alpha} - \frac{N}{2} Trace(\hat{\Sigma})$$

Soit :

$$\lambda = \frac{Trace(\hat{\Sigma})}{n}$$

Dans le cas d'une gaussienne multivariée de dimension 2 on obtient :

$$\lambda = \frac{Trace(\hat{\Sigma})}{2}$$

Modèle EM

On considère à présent un modèle EM.
Pour un mélange de m gaussiennes, on note :

$$\Theta = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$$

avec les λ_i les coefficients de proportionnalité à l'identité.
Pour chaque i, on note =

$$\hat{\Sigma}_i = \frac{1}{N} \frac{\sum_{k=1}^{N} \tau_k^i * (x_k - \mu_i)^T (x_k - \mu_i)}{\sum_{k=1}^{N} \tau_k^i}$$

Et on applique lors de la maximisation :

$$\lambda = \frac{Trace(\hat{\Sigma}_i)}{n}$$